Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

WS 2012/2013

Institut für Theoretische Physik II
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner
Sprechstunde: Do. 9-11 Uhr, Raum 02.782.
E-mail: heidrich-meisner@lmu.de

3. Übungsblatt Many-body physics with ultra-cold atomic gases

30.11.2012
Besprechung: Dienstag, 6.11.2012

3.1: Quadratischer Stark-Effect

Wir betrachten Wasserstoff in einem externen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$, das in z-Richtung zeigt. Wir bezeichnen die ungestörten Eigenzustände mit $|\psi\rangle = |n, l, m\rangle$.

a. Zeigen Sie, dass die Energieverschiebung $\Delta E_{100} = E_{100}^{(2)} + E_{100}^{(1)}$ des Grundzustandes ($n = 1$) in zweiter Ordnung Störungstheorie als $\Delta E_{000} = -\alpha E^2/2$ geschrieben werden kann, wobei die Polarisierbarkeit α durch

$$\alpha = 2e^2 \sum_{n>1} \frac{|\langle 1,0,0|z|n,1,0\rangle|^2}{E_{n00} - E_{100}} \,.$$

gegeben ist.

b. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n>1} |\langle 1,0,0|z|n,1,0\rangle|^2 = a_0^2$$

wobei a_0 der Bohrsche Radius ist.

3.2: Polarisierbarkeit, klassisch

Berechnen Sie die Polarisierbarkeit eines elektrischen Dipols klassich, dass heişt, nehmen Sie an, dass das Dipolmoment $\boldsymbol{d}$ in einem externen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ folgender Bewegungsgleichung folgt:

$$\frac{d^2\boldsymbol{d}}{dt^2} + \omega_0^2 \boldsymbol{d} = \frac{e^2}{m_e} \boldsymbol{E} \,.$$

a. Bestimmen Sie die Polarisierbarkeit $\alpha(\omega)$ für $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} e^{-i\omega t}$.

b. Skizzieren Sie $\alpha(\omega)$ als Funktion von ω.

c. Vergleichen Sie das klassische Resultat mit dem in der Vorlesung diskutierten perturbativen, quantenmechanischen Resultat.

3.3: Freie Expansion eines Bosegases

Betrachten Sie ein freies Bosegas in einer anisotropen, dreidimensionalen harmonischen Falle ($V(\boldsymbol{r}) = m\sum_i(\omega_i^2 x_i^2)/2$), das vollständig kondensiert ist. Der Einteilchenzustand, in dem das Kondensat realisiert ist, ist dann ($i = x, y, z$):

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t = 0) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{1}{(a_x a_y a_z)^{1/2}} \prod_i \exp(-x_i^2/(2a_i^2)).$$

wobei $a_i^2 = \hbar/(m\omega_i)$. Bei $t = 0$ wird das Fallenpotential vollständig abgeschaltet. Berechnen Sie die Wellenfunktion $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ des Systems bei $t > 0$.

3.4: Spezifische Wärme eines idealen Bose-Gases in der Nähe von T_c

Vervollständigen Sie die in der Vorlesung diskutierte Herleitung des Sprungs in der spezifischen Wärme eines idealen Bose-Gases bei $T = T_c$. Gehen Sie dabei von den beiden Gleichungen für die Energie und die Gesamtteilchenzahl für $T > T_c$ aus:

$$E = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^\alpha \frac{1}{\exp(\beta(\epsilon - \mu)) - 1} \tag{1}$$

$$N = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \frac{1}{\exp(\beta(\epsilon - \mu)) - 1} \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} = \alpha N$$

Hinweis: Verwenden Sie eine partielle Integration.

(b) Berechnen Sie für $T = T_c$:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu .$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst her, dass bei $T = T_c$ gilt (für $\alpha > 1$):

$$N = C_\alpha \beta_c^{-\alpha} \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha) .$$

Beachten Sie, dass die Riemannsche-Zetafunktion $\zeta(\alpha)$ endlich ist für $\alpha > 1$ und für $\alpha \leq 1$ divergiert. Weitere nützliche Ausdrücke:

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$$

und $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(c) Woraus ergibt sich, dass diese Rechnung nur für $\alpha > 2$ gültig ist?