Theoretikum zur Theoretischen Physik 1: Mechanik
Testklausur

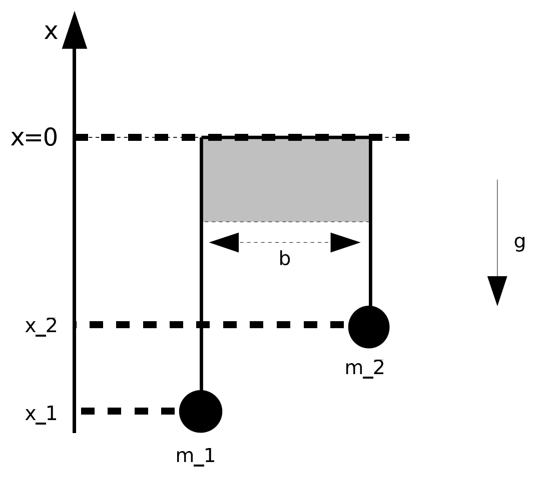
Aufgaben

1. **Harmonischer Oszillator**
   Ein Massepunkt m führe eine harmonische Bewegung aus:
   $$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)\,.$$
   Bestimmen Sie:
   (a) die kinetische Energie T und die potentielle Energie U als Funktion der Zeit t!
   (b) die Gesamtenergie als Funktion der Zeit! Was bedeutet das Ergebnis?
   (c) die Mittelwerte $\langle T \rangle$ und $\langle U \rangle$ der kinetischen bzw. der potentiellen Energie über eine ganze Periode τ der Schwingung.

   Hinweis zur Mittelwertbildung einer Größe $A(x)$ im Intervall $[x_0, x_1]$:
   $$\langle A(x) \rangle = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, A(x)$$

2. **Kurvenintegrale**
   Sind Kurvenintegrale im Vektorfeld $\vec{K} = (3x^2 + 2y, -9yz, 8xz^2)$ von der Form des Weges unabhängig? Überprüfen sie dies über
   (a) Berechnung von $\vec{\nabla} \times \vec{K}$
   (b) Berechnung der Kurvenintegrale von $\vec{r_a} = (0,0,0)$ nach $\vec{r_b} = (1,1,1)$ entlang der folgenden Wege:
   C_1: Gerade von $\vec{r_a}$ nach $\vec{r_b}$
   C_2: Polygonzug von $\vec{r_a} \longrightarrow (1,0,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow \vec{r_b}$
   C_3: Parabelbogen mit $\vec{r}(s) = (s, s^2, s^4)$.

3. **Lagrange-Mechanik**
   Zwei Massen m_1 und m_2 hängen im Schwerefeld $\vec{g}$ an den Enden eines masselosen Seils der Länge l, welches reibungsfrei über einen Balken der Breite b gleitet.
   (a) Wie lautet die Zwangsbedingung
   (b) Wie lautet die Lagrange-Funktion
   (c) Geben Sie die Bewegungsgleichung an und integrieren Sie diese.



Lösungen

1. **Harmonischer Oszillator**
Zuerst halten wir fest, dass

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x_0\omega\cos(\omega t+\phi)\\ \ddot{x} &= -\omega^2 x\end{aligned}$$

(a)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

und da $F = m\ddot{x}$:

$$U = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

(b)

$$E = T+U = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 = \mathrm{const}$$

(c) Mit $2\pi/\tau = \omega$ ist

$$\begin{aligned}\langle T\rangle &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{d}t\,T = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{d}t\,\cos^2(\omega t+\phi)\\ \langle U\rangle &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{d}t\,U = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{d}t\,\sin^2(\omega t+\phi)\end{aligned}$$

Damit ist klar, dass $\langle T\rangle = \langle U\rangle$. Weiter ist die Mittelung des Sinus und des Cosinus über eine ganze Periode:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Also ist

$$\langle T\rangle = \langle U\rangle = \frac{1}{4}mx_0^2\omega^2$$

Mit $\langle T\rangle = \langle U\rangle$ erhält man dieses Ergebnis auch über die Mittelung der Gesamtenergie aus (b):

$$\langle E\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle = 2\langle T\rangle = 2\langle U\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2$$

Hinweis: $\langle T\rangle = \langle U\rangle$ gilt nicht immer, sondern nur im harmonischen Potential! Allgemein gilt der *Virialsatz* im Potential $U \propto x^n$:

$$\langle T\rangle = \frac{n}{2}\langle U\rangle$$

2. **Kurvenintegrale**

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 3x^2+2y \\ -9yz \\ 8xz^2\end{pmatrix}$$

(a)

$$\vec{\nabla}\times\vec{K} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3x^2+2y \\ -9yz \\ 8xz^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+9y \\ 0-8z^2 \\ 0-2\end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{wegabhängig}$$

(b) C_1: Parametrisiere Gerade: $t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\vec{K}d\vec{r} &= \int_0^1 dt\vec{K}\frac{d\vec{r}}{dt} = \int_0^1 dt\vec{K}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \int_0^1 dt(3x^2+2y-9yz+8xz^2)\\ &= \int_0^1 dt(3t^2+2t-9t^2+8t^3) = \left[t^3+t^2-3t^3+2t^4\right]_0^1 = 1\end{aligned}$$

C_2:

$$\begin{aligned}\int_{C_2}\vec{K}d\vec{r} &= \int_0^1 K_x dx|_{y=z=0} + \int_0^1 K_y dy|_{x=1,z=0} + \int_0^1 K_z dz|_{x=y=1}\\ &= \left[x^3\right]_0^1 + 0 + \left[\frac{8}{3}z^3\right]_0^1 = 1+\frac{8}{3} = \frac{11}{3}\end{aligned}$$

C_3:

$$\begin{aligned}\int_{C_3}\vec{K}d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{K}\frac{d\vec{r}}{ds}ds = \int_0^1 \vec{K}\begin{pmatrix}1\\2s\\4s^3\end{pmatrix}ds\\ &= \int_0^1\left[(3s^2+2s^2)+(-9s^2s^4\cdot 2s)+(8ss^8\cdot 4s^3)\right]ds\\ &= \int_0^1\left[5s^2-18s^7+32s^{12}\right]ds\\ &= \left[\frac{5}{3}s^3-\frac{18}{8}s^8+\frac{32}{13}s^{13}\right]_0^1 = \frac{520}{312}-\frac{702}{312}+\frac{768}{312} = \frac{293}{156}\end{aligned}$$

Alle drei Kurvenintegrale liefern in $\vec{K}$unterschiedliche Ergebnisse.

3. **Lagrange-Mechanik**

(a) Eine Zwangsbedingung: Länge: $l = -x_1 - x_2 + b$

(b) $L = T - U = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2$

wähle x_1 als generalisierte Koordinate:

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ x_2(x_1) = -l - x_1 + b\\ &\Rightarrow\ \dot{x}_2(x_1) = -\dot{x}_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow L = \frac{\dot{x}_1^2}{2}(m_1+m_2) - m_1 g x_1 - m_2 g(-l - x_1 + b)$

(c)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0\\ \Rightarrow\ &\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{x}_1\right) - (-m_1 g + m_2 g) = 0\\ \Rightarrow\ &\ddot{x}_1 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g\\ \Rightarrow\ &\dot{x}_1 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}gt + C_1\\ \Rightarrow\ &x_1(t) = \frac{1}{2}\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}gt^2 + C_1 t + C_2\end{aligned}$$